# Matematyczne powtórki

# 1. Liczby rzeczywiste

Najważniejsze zagadnienia z tego działu to:

- Potęgi i działania na potęgach
- Pierwiastki i działania na pierwiastkach
- Logarytmy
- Obliczenia procentowe
- Wartość bezwzględna

## POTĘGI

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c} \qquad a^b : a^c = a^{b-c} \qquad (a^b)^c = a^{b\cdot c}$$

$a^{-b} = \left(\frac{1}{a}\right)^b$ np. $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ $\quad (1\frac{2}{3})^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a}^m$ np. $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = 2$ $\quad 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8}^2 = 2^2 = 4$

## PIERWIASTKI

$\sqrt[b]{a} \cdot \sqrt[b]{c} = \sqrt[b]{a \cdot c}$ np. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{10}$ $\quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

$\sqrt[b]{a} : \sqrt[b]{c} = \sqrt[b]{a : c}$ np. $\sqrt[3]{12} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{3}$ $\quad \sqrt{20} : \sqrt{5} = \sqrt{4} = 2$

Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka:

$\sqrt{54} = 3\sqrt{2 \cdot 3} = 3\sqrt{6}$

stopień pierwiastka to 2
więc powtarzające się liczby
łączymy w pary

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$

stopień pierwiastka to 3
więc powtarzające liczby
łączymy w trójki

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Usuwanie niewymierności z mianownika ułamka:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{1}{3+\sqrt{2}} = \frac{1}{3+\sqrt{2}} \cdot \frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{1(3-\sqrt{2})}{3^2-\sqrt{2}^2} = \frac{3-\sqrt{2}}{9-2} = \frac{3-\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{2}{2-\sqrt{3}} = \frac{2}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{2^2-\sqrt{3}^2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{4-3} = 4 + 2\sqrt{3}$$

## LOGARYTMY

$log_a b = c, tak\ że\ a^c = b$ np. $log_2 8 = 3, bo\ 2^3 = 8$ $log_3 \frac{1}{81} = -4, bo\ 3^{-4} = \frac{1}{81}$

$log_a b + log_a c = log_a (b \cdot c)$ np. $log_4 8 \cdot log_4 2 = log_4 16 = 2$

$log_a b - log_a c = log_a (b : c)$ np. $log_2 100 - log_2 25 = log_2 4 = 2$

$plog_a b = log_a b^p$ np. $2log_4 8 = log_4 8^2 = log_4 64 = 3$

$2log_5 10 - log_5 4 = log_5 100 - log_5 4 = log_5 25 = 2$

## OBLICZENIA PROCENTOWE

Tu zapamiętajcie jedno punkt procentowy(p.p.) to co innego niż procent, np.

Poparcie dla partii A wzrosło z 40% do 45%, zatem poparcie wzrosło:

- o 5 p.p. (czyli to różnica między wielkościami które są wyrażone w procentach)
- o 12,5% ( żeby to obliczyć wykonujemy działanie $\frac{5}{40} \cdot 100\% = 12{,}5\%$ - w liczniku są punkty procentowe, a w mianowniku wartość od której mamy zmianę, tu wzrost poparcia jest od 40)

## WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

Pamiętamy! Jeśli wyrażenie w wartości bezwzględnej jest dodatnie to opuszczamy wartość bezwzględną bez wprowadzania zmian. Jeśli wyrażenie w module jest ujemne, opuszczając wartość bezwzględną zmieniamy znaki na przeciwne.

$|3| = 3$ $|-4| = 4$ $|0| = 0$ $|3 - \pi| = -3 + \pi$ $|\sqrt{5} - 3| = -\sqrt{5} + 3$ $|3 - \sqrt{5}| = 3 - \sqrt{5}$

Teraz czas na Ciebie! Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Oblicz:

   a) $2^4$ c) $3^{-2}$ e) $27^{\frac{2}{3}}$ g) $27^{\frac{1}{3}}$ i) $9^{1,5}$

   b) $5^0$ d) $1,5^{-2}$ f) $2,5^{-1}$ h) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ j) $6,25^{-0,5}$

2. Korzystając z praw działań na potęgach zapisz w postaci potęgi o podstawie a: $\frac{a^3 \cdot a^4 \cdot a}{a^2 : a^{-3}}$
3. Zapisz w postaci potęgi liczby 3:

   a) $9^7 : \left(3^4 \cdot \sqrt{3}^{10}\right)$ b) $27^{11} \cdot 81$ c) $(9^5)^2 \cdot 3^{-7}$

4. Zapisz w postaci potęgi liczby 2:

   a) $\sqrt[3]{2^8}$ b) $8\sqrt[3]{4}$ c) $\sqrt[3]{8^2} \cdot \sqrt[3]{4}$ d) $\sqrt[5]{\frac{1}{16}} \cdot \sqrt[3]{0,25}$

5. Oblicz:

a) $2\sqrt{18} - \sqrt{32}$ b) $2\sqrt{20} - 3\sqrt{27} + \sqrt{500} - \sqrt{75}$ c) $2\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{192}$

6. Usuń niewymierność z mianownika:

   a) $\frac{5}{2\sqrt{2}}$ b) $\frac{3}{\sqrt{7} - 3\sqrt{5}}$ c) $\frac{1+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ d) $\frac{2}{2+\sqrt{2}}$

7. Oblicz:

a) $\log_3 243$ d) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9}$ g) $\log_{27} \sqrt{3}$

b) $\log 1000$ e) $\log_5 25\sqrt{5}$ h) $\log \sqrt[5]{10}$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 32$ f) $\log_4 8$ i) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{16}$

8. Oblicz stosując prawa działań na logarytmach:

a) $\log_6 72 - \log_6 2 =$ d) $\log_{\frac{1}{3}} 12 - \log_{\frac{1}{3}} 4\sqrt[3]{3} =$

b) $\log 15 + \log 50 - \log \frac{3}{4} =$ e) $3\log_4 2 - \frac{1}{2}\log_4 16 =$

c) $\log 2\sqrt{10} - \log 4 - \log 0,5 =$ f) $2\log_3 6 - \frac{1}{2}\log_3 16 =$

9. Oblicz:

   a) $\left|-1\frac{1}{3}\right| =$ c) $|\pi - 3| =$ e) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| =$

   b) $|2 - \sqrt{10}| =$ d) $|\sqrt{7} - 1| - |-3 + \sqrt{7}| =$ f) $|3 - 2\sqrt{2}| - |-3\sqrt{2} + 1| =$

10. Oblicz wartość wyrażenia $|x + 4| - |x - 7|$ dla $x \in (4, 7)$
11. Stopa bezrobocia w pewnym kraju na początku 2015 r. wynosiła 15,1%, a na początku następnego roku obniżyła się do 9,2%.
    a) O ile punktów procentowych obniżyło się bezrobocie?
    b) O ile procent obniżyło się bezrobocie?
12. Wyznacz liczbę x, której 2,5% jest równe 40.
13. Buty, które kosztowały 220zł przeceniono i sprzedano za 176zł. O ile procent obniżono cenę butów?

# 2. Wyrażenia algebraiczne

Najważniejsze zagadnienia z tego działu to:

Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

- <u>Kiedy stosujemy wzory skróconego mnożenia?</u>

  Zawsze wtedy, gdy wyrażenie w nawiasie jest zapisane za pomocą wyrazów, które **nie są** podobne, np.

  $(3 - \sqrt{2})^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = \underline{9} - 6\sqrt{2} + \underline{2} = 11 - 6\sqrt{2}$

  $(4 + 3x)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3x + (3x)^2 = 16 + 24x + 9x^2$

  Pamiętaj, jeśli w nawiasie masz wyrazy podobne nie musisz stosować powyższych wzorów, np.

  $(3 + 6)^2 = 9^2 = 81$ lub $(2x + 5x)^2 = (7x)^2 = 49x^2$

- Wzory skrócone, a zadania na dowodzenie.

Wielu z Was niestety nawet nie próbuje rozwiązywać tego typu zadań, a szkoda, bo przecież to 2 punkty!

Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej *x*

$$4x + \frac{1}{x} \geq 4$$

Widząc taką nierówność pierwsza nasza myśl to zadziałać tak, aby nie było ułamków. Czy możemy pomnożyć nierówność przez x? tak, ponieważ w treści zadania było powiedziane, że x jest dodatni.

$4x + \frac{1}{x} \geq 4 \qquad / \cdot x$

$4x^2 + 1 \geq 4x$ ⟵ przenosimy wyrazy na jedną stronę

$4x^2 - 4x + 1 \geq 0$ ⟵ tu mamy „ukryty” wzór

$(2x-1)^2 \geq 0$ ⟵ teraz wystarczy uzasadnić jednym zdaniem: kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny (czyli większy lub równy zeru).

Tym sposobem macie maksymalną liczbę punktów za to zadanie.

# Usuwanie niewymierności z mianownika ułamka

- Można <u>bez</u> wzorów, np. $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
- Z użyciem wzorów, np.

$$\frac{2}{3-\sqrt{2}} = \frac{2}{3-\sqrt{2}} \cdot \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{2(3+\sqrt{2})}{\underbrace{(3-\sqrt{2})}_{a-b}\underbrace{(3+\sqrt{2})}_{a+b}} = \frac{6+2\sqrt{2}}{\underbrace{3^2-\sqrt{2}^2}_{(a-b)(a+b)}} = \frac{6+2\sqrt{2}}{\underbrace{9-2}_{a^2-b^2}} = \frac{6+2\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{3}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3}{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3(3-2\sqrt{2})}{3^2-(2\sqrt{2})^2} = \frac{9-6\sqrt{2}}{9-8} = \frac{9-6\sqrt{2}}{1} = 9-6\sqrt{2}$$

# Lista do samodzielnego rozwiązania

1. Uprość wyrażenie:

a) $(2x + y)^2 =$

b) $(x^2 - 5z)^2 =$

c) $(3x^2 + 4x)(3x^2 - 4x) =$

d) $(2x - 1)^2 - (x - 2) =$

2. Oblicz, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia:

a) $(1 + \sqrt{10})^2 =$

b) $(3\sqrt{2} + 1)^2 =$

c) $(10 - 5\sqrt{2})^2 =$

d) $(2\sqrt{2} - 4)(2\sqrt{2} + 4) =$

3. Rozłóż dane wyrażenie na czynniki (czyli przedstaw w postaci iloczynu)

a) $25 - 10y + y^2 =$

b) $100x^2 - 49 =$

c) $16x^4 - 81 =$

d) $(7 + x)^2 - 25 =$

e) $16 - (x^2 - 6x + 9) =$

4. Wykaż, że $\sqrt{9 + 2\sqrt{14}} = \sqrt{2} + \sqrt{7}$
5. Uzasadnij, że jeżeli a jest liczbą rzeczywistą różną od zera i $a + \frac{1}{a} = 3$, to $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$
6. Wykaż, że jeżeli $a \in R$ i $b \in R$, to:

a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$

b) $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)$

c) $4a^2 + 5b^2 - 8ab \geq 0$

7. Skróć wyrażenie:

a) $\frac{2x+6x^2}{1-9x^2}$

b) $\frac{x^2-8x+16}{2x-8}$

7. Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

a) $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} =$

b) $\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}-4} =$

c) $\frac{12}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$

d) $\frac{4\sqrt{2}-1}{2\sqrt{3}+5} =$

# 3. Równania i nierówności

Najważniejsze zagadnienia z tego działu to:

- Równania i nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą;
- Równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;
- Równania typu $x^3 = -8$;
- Własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x + 1)(x - 7) = 0$;
- Proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np.

$$\frac{x+1}{x+3} = 2, \quad \frac{x+1}{x} = 2x$$

## Proporcja

$$\frac{2x-4}{4} = \frac{x+1}{3}$$

**Pamiętajcie**: Iloczyn wyrazów skrajnych (czerwonych) jest równy iloczynowi wyrazów środkowych (niebieskich)

$3(2x - 4) = 4(x + 1)$

$6x - 12 = 4x + 4$

$6x - 4x = 4 + 12$

$2x = 16$

$x = 8$

## Nierówności pierwszego stopnia

Gdzie tu jest pułapka? Jeśli mnożycie lub dzielicie nierówność przez liczbę ujemną musicie **zmienić zwrot** nierówności na przeciwny, np.

$2x - 6 > 5x + 9$

$2x - 5x > 9 + 6$

$- 3x > 15 \ / : (-3)$

$x < - 5$

## Nierówności kwadratowe

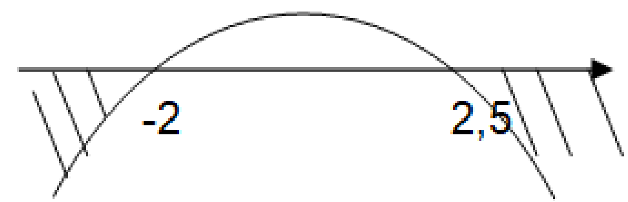
Z równaniami nie macie problemów (taką mam nadzieję), a z nierównościami jest różnie.

Rozwiązując nierówności kwadratowe musimy: uporządkować nierówność, obliczyć deltę i pierwiastki, naszkicować parabolę, a na koniec opisać przedział spełniający naszą nierówność, np.

$x + 10 < 2x^2$

$-2x^2 + x + 10 < 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 10 = 1 + 80 = 81$




$x_1 = \frac{-1-9}{-4} = \frac{-10}{-4} = 2{,}5$ $\quad$ $x_2 = \frac{-1+9}{-4} = -2$

Odpowiedź: $x \in (-\infty;\ -2) \cup (2{,}5\ ;\ \infty)$

Proste równania wielomianowe

$2x(x + 2)(x^2 - 9) = 0$ Co tutaj mamy? Pojawia się własność iloczynu **$a \cdot b = 0$**, która mówi nam, że iloczyn wyrazów jest równy zero, gdy któryś z czynników jest równy zero. Zatem to co powinniśmy zrobić, to przyrównać do zera **każdy** z czynników (również ten który nie jest w nawiasie).

$2x = 0$ lub $x + 2 = 0$ lub $x^2 - 9 = 0$

$x = 0$ lub $x = -2$ lub $x = 3$ lub $x = -3$ ← równanie $x^2 = 9$ ma **dwa** rozwiązania

Odpowiedź: Równanie ma 4 rozwiązania: 0, - 2, - 3, 3

Co zrobić jeśli nie mamy równania zapisanego w postaci iloczynowej?

Trzeba do niej doprowadzić! Mamy następujące metody: wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias, wzory skróconego mnożenia, delta, grupowanie wyrazów.

Przedstawię tę ostatnią ponieważ dość często pojawia się w proponowanych arkuszach maturalnych

$2x^3 + 6x^2 - 4x - 12 = 0$ ← łączymy sobie w grupy po 2 wyrazy, z każdej grupy wyłączamy wspólny czynnik

$2x^2(x + 3) - 4(x + 3) = 0$ ← i znowu wspólny czynnik ponownie wyłączamy przed nawias

$(x + 3)(2x^2 - 4) = 0$ ← i już mamy postać iloczynową ☺

$x + 3 = 0$ lub $2x^2 - 4 = 0$

$x = -3$ lub $x^2 = 2$

$x = -3$ lub $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$

## Równania wymierne

Musimy pamiętać o dziedzinie takiego równania! Rozwiązania, które otrzymamy muszą należeć do dziedziny tego równania, np.

$\frac{4-x}{x} = x - 1$ D: x ≠ 0

$\frac{4-x}{x} = \frac{x-1}{1}$ budujemy proporcję (można oczywiście inaczej, np. pomnożyć obustronnie przez x )

$x(x-1) = 1(4-x)$

$x^2 - x = 4 - x$

$x^2 = 4$

$x = -2 \text{ lub } x = 2$ sprawdzamy, czy nasze rozwiązania są zgodnie z założeniem, czyli różne od zera, u nas są (gdyby któreś rozwiązanie wyszło zero, należy je odrzucić)

# Lista do samodzielnego rozwiązania

1. Rozwiąż równania i nierówności:

a) $2-(4-x)(x+4)=(x-1)^2$

b) $\frac{x+2}{3}-\frac{1}{4}x=\frac{1}{12}x+\frac{2}{3}$

c) $3x+1-\frac{x+3}{4}<4x-2$

d) $(x+\frac{1}{2})^2 \leq x(x-\frac{3}{4})$

2. Wykaż, że nierówność:

a) $\frac{(x+2)^2}{2}-\frac{(x-4)^2}{4}<\frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{4}+4x$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x

b) $2(x-3)^2-(x+3)^2>(x-3)(x+3)+18(1-x)$ nie ma rozwiązania.

3. Rozwiąż równania kwadratowe:

a) $9x^2-100=5x^2$

b) $(3x-1)(4x+5)=(4x+5)(2x-1)$

c) $(2+5x)^2=19x+(x-4)(x+5)$

e) $(x+3)^2-5(x+3)+4=0$

f) $(3+2x)^2=(3x+2)^2+10$

g) $(x+3)^2-25=0$

4. Rozwiąż nierówności kwadratowe:

a) $-x^2-5x>0$

b) $-2x^2+16x-35<0$

c) $-\frac{1}{2}x^2-4x-8\geq 0$

d) $5x-10<2x^2$

e) $x^2-4x<21$

f) $9x^2+6x+4<3$

g) $-(x-7)^2\geq 2x+1$

h) $-\frac{1}{4}x^2+2x+5\leq 0$

i) $2x^2-2x-24<0$

5. Rozwiąż równania:

a) $-4x(x-3)(x-\sqrt{2})(x+4)=0$

b) $9x^2(x^2-4)(x^2+4)=0$

c) $(x^3-8)(x^5+32)=0$

d) $x^3-2x^2-9x+18=0$

e) $2x^3+x^2-8x-4=0$

f) $x^3-6x=x-6$

6. Rozwiąż równania wymierne:

a) $\frac{(x^2-25)(x-1)}{(x-5)(x-2)}=0$

b) $\frac{4}{2x-3}=5$

c) $\frac{7-3x}{1-x}=\frac{1+3x}{1-x}$

d) $\frac{x}{4x-1}=-1$

e) $\frac{5x-3}{x-2}=\frac{x-2}{x-1}$

f) $\frac{3}{x+2}=\frac{1}{x-2}$

7. Uzasadnij, że nie istnieją takie dwie liczby całkowite, których suma jest równa 23, a iloczyn jest większy od 132.
8. Wyznacz liczbę dwucyfrową, wiedząc, że jej cyfra jedności jest o 5 większa od cyfry dziesiątek, a iloczyn tej liczby przez sumę jej cyfr jest równy 243.
9. W trójkącie równoramiennym podstawa jest o 3cm krótsza od ramienia. Wiedząc, że wysokość opuszczona na podstawę ma 12cm, oblicz pole tego trójkąta.
10. Liczbę 12 przedstaw w postaci sumy dwóch takich składników, że suma ich kwadratów jest równa 74.
11. Suma pewnej liczby a i jej odwrotności jest równa $2\frac{4}{63}$. Wyznacz liczbę a.

# 4. Funkcje

Najważniejsze zagadnienia z tego działu to:

- obliczanie ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu
- odczytywanie z wykresu własności funkcji
- przekształcenia wykresu funkcji (przesunięcia równoległe, symetrie względem osi układu współrzędnych)
- szkicowanie wykresów funkcji na podstawie wzoru
- wyznaczanie wzoru funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie
- znaczenie współczynników występujących we wzorze funkcji liniowej
- interpretacja współczynników występujących we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, ogólnej i iloczynowej (o ile istnieje);
- wyznaczanie wartości najmniejszej i wartości największej funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
- wykresy funkcji wykładniczych.

<u>Podstawowe pojęcia:</u>

- Argument funkcji – to inaczej x
- Wartość funkcji – to y / f(x)
- Dziedzina – to zbiór argumentów, czyli zbiór x –ów
- Miejsce zerowe – to x (jest to taki x dla którego y = 0), należy do dziedziny funkcji .

Przykład 1.

Oblicz wartość funkcji $f(x) = 2x^2 – 6$ dla argumentu $2\sqrt{3}$ czyli za x wstawiamy $2\sqrt{3}$

$y = 2(2\sqrt{3})^2 – 6$ oczywiście obowiązuje kolejność wykonywania działań

$y = 2 \cdot 12 – 6 = 24 – 6 = 18$

Zatem wartość funkcji f dla argumentu $2\sqrt{3}$ wynosi 18.

Przykład 2.

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{3-x}{2x+8}$ jest to pytanie: jakie liczby mogę wstawić za x?

Funkcja jest określona za pomocą ilorazu (dzielenia), a pamiętamy, że nie wolno nam dzielić przez 0! Czyli to co mamy w mianowniku ułamka musi być różne od zera.

D: $2x + 8 \neq 0$ $2x \neq - 8$ $x \neq -4$

$D = R – \{- 4\}$

Przykład 3.

Oblicz miejsce zerowe funkcji $f(x) = 24 - \frac{3}{4}x$ szukamy x dla którego y = 0

$24 - \frac{3}{4}x = 0$ $24 = \frac{3}{4}x$ $x = 24 \cdot \frac{4}{3} = 8 \cdot 4 = 32$

Zatem miejsce zerowym jest liczba 32.

Przykład 4.

Dla jakiej wartości parametru $p$ funkcja:

a) $y = (p - 7)x + 5$ jest rosnąca

funkcja będzie rosnąca jeśli a >0

$p - 7 > 0$

$p > 7$

$p \in (7, \infty)$

b) $y = (\frac{1}{2}p + 1)x - 3$ jest malejąca

funkcja będzie malejąca jeśli a < 0

$\frac{1}{2}p + 1 < 0$

$\frac{1}{2}p < -1$

$p < -2$ $p \in (-\infty, -2)$

Przykład 5.

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = -2x^2 + 4x+1$ w przedziale $\langle 0,3 \rangle$

W pierwszym kroku musimy sprawdzić czy wierzchołek paraboli należy na naszego przedziału.

$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2\cdot(-2)} = \frac{-4}{-4} = 1$ widzimy, że 1 należy do przedziału $\langle 0,3 \rangle$ zatem obliczamy

$f(1) = -2\cdot(1)^2 + 4\cdot 1 + 1 = -2+ 4 + 1 = 3$

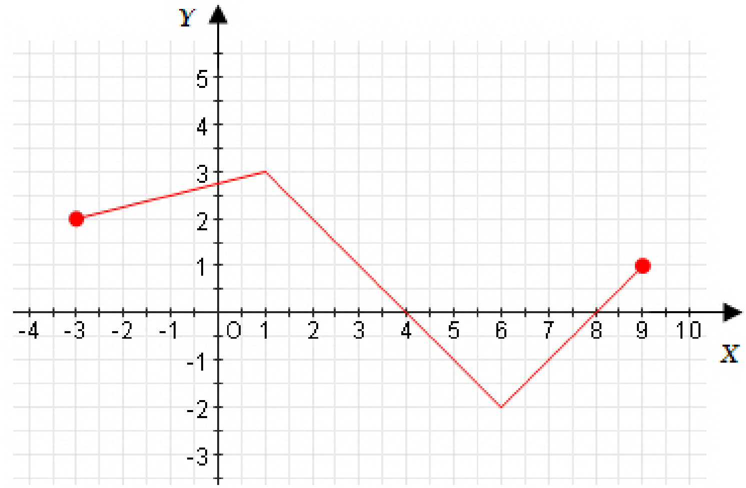
$f(0) = -2\cdot 0^2 + 4\cdot 0 + 1 = 1$

$f(3) = -2\cdot(3)^2 + 4\cdot 3 + 1 = -2\cdot 9 + 12 + 1 = -18+12+1= -5$

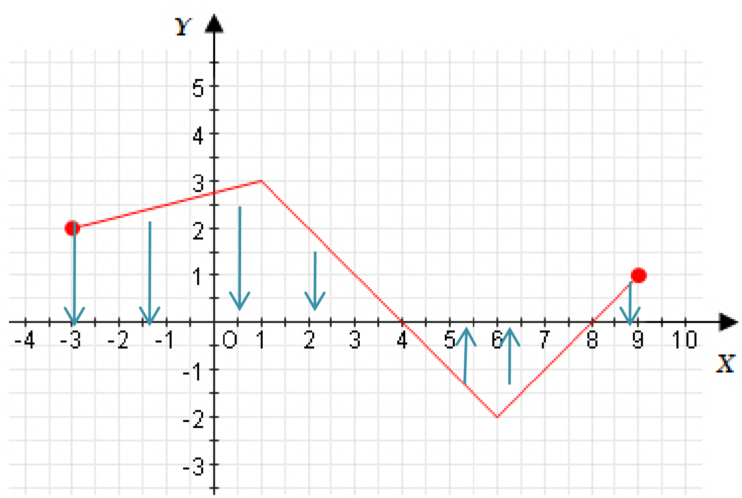
Odpowiedź: najmniejszą wartością jest – 5, a największą jest 3.

Uwaga: Jeśli wierzchołek paraboli nie należy do przedziału to obliczamy tylko wartości funkcji na końcach przedziału.

# Odczytywanie własności funkcji

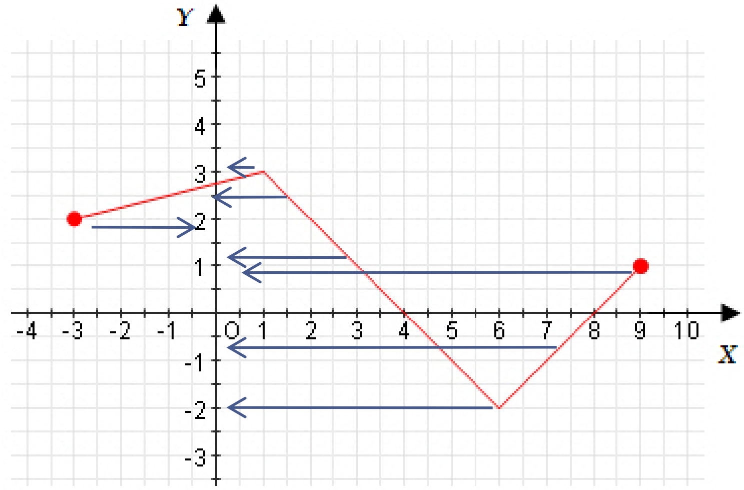



1) Dziedzina funkcji – czyli zbiór argumentów



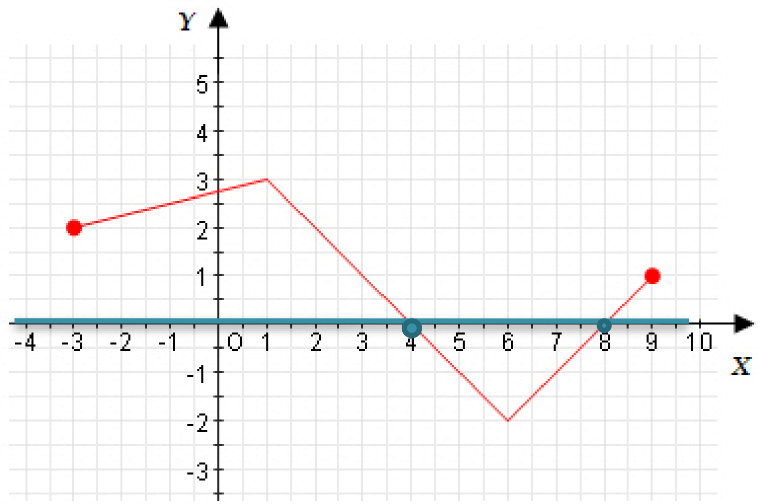

D = [ - 3;  9]

2) Zbiór wartości – zbiór y




ZW = [-2, 3]

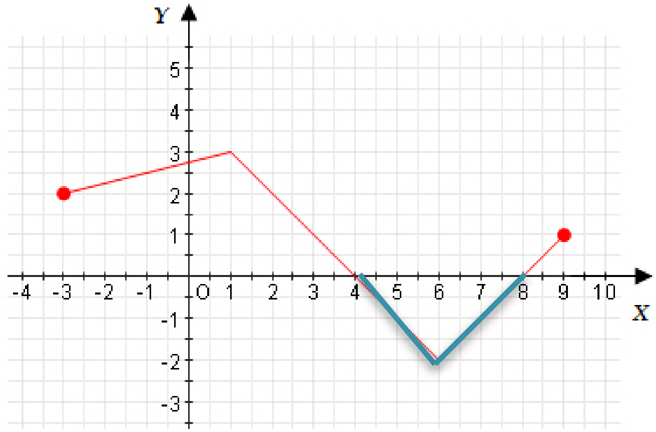
3) Miejsca zerowe




x = 4 i x = 8

∈

4) Wartości dodatnie i wartości ujemne



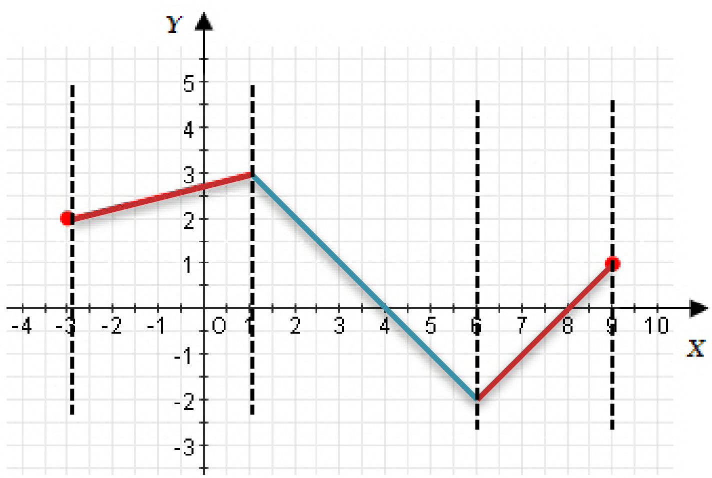

Wartości dodanie, czyli interesuje nas fragment wykresu „powyżej” osi x

f(x) > 0 dla x ∈ [-3 ; 4) U (8 ; 9]

Wartości ujemne, czyli fragment wykresu „poniżej” osi x

f(x) < 0 dla x∈ ( 4, 8)

5) Przedziały monotoniczności funkcji – czyli zbiór argumentów (x), w których funkcja rośnie, maleje lub jest stała.




Funkcja jest rosnąca (czerwony fragment)

w przedziałach : [- 3; 1] oraz [6; 9]

Funkcja jest malejąca (niebieski fragment)

w przedziale: [1; 6]

# Lista do samodzielnego rozwiązania

1. Sprawdź, czy punkt *A* leży na wykresie funkcji *f*, gdy:

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ i $A = \left(\sqrt{3}, \frac{5}{2}\right)$

b) $f(x) = \left|\sqrt{2} - x\right|$ i $A = \left(\sqrt{2}+1, -1\right)$

c) $f(x) = x^{-3}$ i $A = (-\frac{1}{2}, -8)$

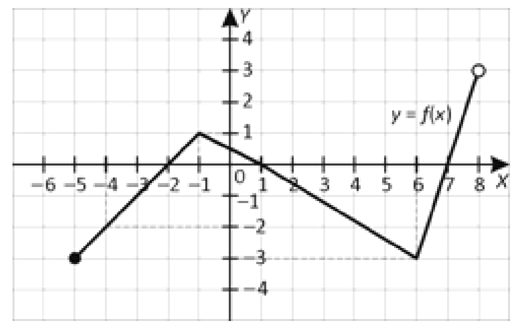
2. Oblicz wartość funkcji *f* dla argumentu $x_0$, gdy:

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ i $x_0 = \sqrt{3} + 1$

b) $f(x) = 2^{x-3}$ i $x_0 = 0$

c) $f(x) = \frac{-4}{x}$ i $x_0 = 4\sqrt{3}$

3. Na podstawie wykresu funkcji *f* podaj:




a) dziedzinę funkcji $D_f$

b) zbiór wartości funkcji ZW

c) miejsce zerowe funkcji

d) zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja *f* przyjmuje wartości ujemne

e) maksymalne przedziały, w których funkcja jest rosnąca

f) wartość wyrażenia $f(-4) \cdot f(6) - f(-1)$

5. Określ, o ile jednostek i wzdłuż której osi układu współrzędnych należy przesunąć wykres funkcji f, aby otrzymać wykres funkcji g, gdy:

a) $g(x) = f(x-2)$

b) $g(x) = f(x+3)$

c) $g(x) = f(x-1) + 4$

d) $g(x) = f(x+2) - 1$

e) $g(x) = f(x) - 2$

f) $g(x) = f(x+4) + 2$

*Funkcja liniowa*

6. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkt A i tworzy z osią x kąt α:

a) A = (2, 1), α = 30° b) A = (- 3, 0), α = 120°

7. Napisz wzór funkcji liniowej, wiedzą, że:

a) Jej wykres jest nachylony do osi x pod kątem 120° oraz jej miejscem zerowym jest liczba $2\sqrt{3}$,

b) Rzędna punktu przecięcia jej wykresu z osią y jest równa 4, a odcięta punktu przecięcia z osią x jest równa 2,

c) Jej wykres jest równoległy do prostej o równaniu y = - 4x + 6 i przechodzi przez punkt P=(- 1, 7)

d) Do jej wykresu należą punkty A=(-5, $\sqrt{5}$) i B=(-$\sqrt{5}$, 5),

e) Jej wykres jest prostopadły do prostej o równaniu y = -2x – 1 i przechodzi przez punkt P=(4, - 3)

8. Oblicz, dla jakich wartości *k* funkcja liniowa *f* określona wzorem:

a) $f(x) = (-2k + 6)x - 4$ jest malejąca,

b) $f(x) = \left(3 - \frac{2k+3}{4}\right)x + 3$ jest rosnąca,

c) $f(x) = \frac{3k+2}{5} \cdot x - 4$ nie ma miejsca zerowego.

9. Oblicz współrzędne punktu przecięcia prostych y = - 4x – 3 i y = 2x + 9.

10. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli określonej wzorem:

a) $f(x) = -4x^2 + 9$

b) $f(x) = x^2 - 12x + 36$

c) $f(x) = 2(x+4)^2 + 1$

d) $f(x) = (x-3)(x+5)$

e) $f(x) = -x^2 - x + 2$

f) $f(x) = x^2 + 5x + 6$

11. Do wykresu funkcji kwadratowej *f* należy wierzchołek paraboli *W* i punkt *A*. Napisz wzór tej funkcji.

a) *W* = (-1, 2) i *A* = (0, 0) b) *W* = (0, 3) i *A* = (4, 1) c) *W* = (2, 0) i *A* = (0, 6)

12. Oblicz, dla jakich wartości parametru *k* funkcja kwadratowa *f* określona wzorem:

a) $f(x) = 2x^2 - 7x + k$ ma dwa miejsca zerowe,

b) $f(x) = x^2 - kx + 1$ przyjmuje tylko wartości dodatnie,

c) $f(x) = x^2 - 2kx - 3$ ma wykres, którego oś symetrii ma równanie $x = 1$

d) $f(x) = kx^2 - 36x - 7$ ma wierzchołek leżący na prostej o równaniu $x = 6$.

13. Określ zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji określonej wzorem:

a) $f(x) = -2x^2 + 3$

b) $f(x) = 4(x-2)^2 + 3$

c) $f(x) = -x^2 + 8x - 15$

14. Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji *f* w przedziale *A*:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ $A = \langle \frac{1}{2}; 2 \rangle$

b) $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ $A = \langle -1; 2 \rangle$

c) $f(x) = -x^2 + 6x + 7$ $A = \langle -10; 20 \rangle$

d) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ $A = \langle 2; 5 \rangle$

15. Przy brzegu jeziora chcemy wyznaczyć kąpielisko w kształcie prostokąta, odgradzając je sznurem z bojami. Sznur którym dysponujemy ma długość 80m. Jakie wymiary powinno mieć to kąpielisko, aby jego powierzchnia była możliwie największa?

16. Liczbę 20 rozłóż na dwa składniki, których suma kwadratów jest możliwie najmniejsza.

*Funkcja wykładnicza*

17. Do wykresu funkcji wykładniczej określonej wzorem $y = a^x$ należy punkt P. Podaj wartość a, gdy:

a) $P = (1, 5)$ b) $P = (3, \frac{27}{64})$ c) $P = (-2, \frac{9}{16})$ d) $P = (\frac{1}{3}, 2)$

18. Sprawdź, który punkt nie należy do funkcji określonej wzorem $y = 16^x$

$A = (0, 1)$ $B = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ $C = (\frac{1}{2}, 4)$ $D = (2, 64)$

19. Zaobserwowano, że kolonia pewnej bakterii powiększa się trzykrotnie w czasie jednej doby. W momencie rozpoczęcia obserwacji kolonia liczyła 1000 organizmów.

a) Napisz wzór określający wzrost kolonii bakterii.

b) Oblicz, ile bakterii będzie liczyła kolonia po upływie 6 godzin, a ile po upływie 36 godzin.

# 5. Ciągi liczbowe

Najważniejsze zagadnienia z tego działu to:

- wyznaczanie wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym;
- sprawdzanie, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
- wyznaczanie różnicy ciągu arytmetycznego;
- wyznaczanie ilorazu ciągu geometrycznego;
- zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu;
- obliczanie sumy *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- obliczanie sumy *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Pierwszą rzeczą, o której należy pamiętać jest to, że ciąg jest funkcją określoną na zbiorze liczb naturalnych dodatnich. Co to oznacza? Argumenty, czyli n, to liczby naturalne dodatnie. Za „n" możesz podstawić tylko liczby z tego zbioru. Mówimy, i obliczamy piąty, szósty, dziesiąty itd. wyraz ciągu. Nikomu nie powinno przyjść do głowy obliczać wyraz: – 3, $\frac{1}{2}$, itp.

Jeśli ciąg to funkcja, to również mamy wzór, np. $a_n = 3n - 20$. Poniżej 2 przykłady pytań do tego wzoru.

Przykład 1.

Który wyraz ciągu $a_n$ jest równy 7? Pytanie: który wyraz, to pytanie o argument czyli o n

$3n - 20 = 7$

$3n = 27$

$n = 9$ Zatem dziewiąty wyraz ciągu jest równy 7 ($a_9 = 7$)

Przykład 2.

Ile wyrazów ciągu $a_n$ jest ujemnych? Ujemne, czyli mniejsze od zera ($a_n < 0$)

$3n - 20 < 0$

$3n < 20$

$n < \frac{20}{3}$

$n < 6\frac{2}{3}$ WAŻNE! To nie jest jeszcze odpowiedź, bo pamiętamy że nie ma takiego wyrazu ciągu (TYLKO liczby naturalne), pytamy ile liczby naturalnych dodatnich jest mniejszych od $6\frac{2}{3}$ ?

Odpowiedź: 6 wyrazów jest ujemnych ($a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$)

Przykład 3. Trzy kolejne wyrazy ciągu

a) Dla jakich wartości x liczby: 7, 2x – 4, x + 3, są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

Skojarzmy sobie ciąg arytmetyczny – średnia arytmetyczna. Środkowy wyraz to średnia arytmetyczna wyrazów skrajnych (oczywiście wzór jest w tablicach matematycznych)

$$2x - 4 = \frac{7 + x + 3}{2}$$

4x – 8 = 10 + x

3x = 18, czyli x = 6 (sprawdźmy: 7, 8, 9 – pasuje ☺ )

b) Dla jakich wartości x liczby: x, x + 2, x + 6, są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?

W tym przypadku albo zapamiętajcie, albo skorzystajcie z tablic ze wzorami. Środkowy wyraz podniesiony do kwadratu, to iloczyn wyrazów skrajnych ( czyli to średnia geometryczna, mniej znana)

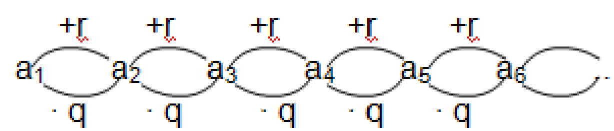
$$(x+2)^2 = x \cdot (x+6)$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 6x$$

$4 = 2x$, czyli x = 2 (sprawdźmy: 2, 4, 8 – i znowu działa ☺)

Przykład 4. Wyznaczanie różnicy i ilorazu

Przypomnijmy jak powstaje ciąg




a) Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego, jeśli $a_3 = -12$ i $a_{18} = 33$.

$a_{18} = a_3 + 15r$

33 = - 12 + 15r

45 = 15r

r = 3

W ciągu arytmetycznym wyrazy powstają przez dodanie do wyrazu poprzedniego tej samej liczby r, zatem trzeba się zastanowić jaka jest „odległość" między trzecim i osiemnastym wyrazem? Jest to 15 r

b) Oblicz iloraz ciągu geometrycznego, jeśli $a_2 = 3$ i $a_7 = 96$

$a_7 = a_2 \cdot q^5$

$96 = 3 \cdot q^5$

$32 = q^5$

q = 2

# Lista do samodzielnego rozwiązania

1. Wypisz pięć początkowych wyrazów ciągu $(a_n)$ określonego wzorem:

a) $a_n = n^2 - 3n$, b) $a_n = 2^n + \frac{1}{2^n}$, c) $a_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$,

2. Podaj dwa następne wyrazy podanego ciągu:

a) $-3, 6, -12, 24, \ldots$

b) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

c) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$

d) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \ldots$

3. Ciąg $(a_n)$ określony jest wzorem $a_n = n(3n + 1)$. Liczba 200 jest jednym z wyrazów tego ciągu. Którym?

4. Sprawdź, czy w ciągu $(a_n)$ występuje wyraz x, jeśli:

a) $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$ $x = 1\frac{5}{6}$

b) $a_n = \frac{3n+1}{2n-1}$ $x = 1\frac{5}{8}$

5. Sprawdź, czy istnieją takie wyrazy ciągu $a_n = 2n^2 - 9n + 11$, które są równe 7?

6. Oblicz piąty wyraz ciągu $(a_n)$, którego suma n początkowych wyrazów $S_n$ określona jest wzorem:

a) $S_n = n(2n + 1)$ b) $S_n = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ c) $S_n = 3(2^n - 1)$.

7. Określ, ile wyrazów ujemnych ma ciąg $(a_n)$ określony wzorem:

a) $a_n = n^2 - 9n + 14$ b) $a_n = n^2 - 5n - 6$ c) $a_n = n^2 - 2n - 24$

8. Określ, ile wyrazów dodatnich ma ciąg $(a_n)$ określony wzorem:

a) $a_n = -n^2 + 9n$ b) $a_n = -2(n-4)(n-8)$ c) $a_n = -(n+2)^2 + 10$.

9. Ciąg $(a_n)$ określony jest wzorem $a_n = 1 + \frac{4}{n}$

a) Który wyraz ciągu jest równy 2?

b) Podaj wszystkie wyrazy ciągu, które są liczbami naturalnymi.

10. Uzasadnij, że tylko dwa wyrazy ciągu określonego wzorem $a_n = n^2 - 110n + 1000$ są równe 0.

*Ciąg arytmetyczny*

11. Ciąg $(b_n)$ jest ciągiem arytmetycznym. Napisz wzór na n-ty wyraz ciągu, gdy:
a) $b_1 = 2$ i $r = 3$ b) $b_2 = \sqrt{3}$ i $b_3 = 3\sqrt{3}$ c) $b_2 = 7$ i $b_5 = 1$
12. Oblicz wyraz pierwszy $a_1$ i różnicę r ciągu arytmetycznego $(a_n)$, gdy:
a) $a_5 = 5$ i $a_8 = -1$ b) $a_{83} = 38$ i $a_{38} = 83$ c) $a_2 + a_5 = 8$ i $a_3 + a_7 = 17$

13. Ciąg $(a_n)$ jest arytmetyczny. Oblicz:
a) Liczbę wyrazów n, gdy $S_n = 204$, $r = 6$, $a_n = 49$
b) Różnicę r, gdy $S_n = 518$, $a_1 = 50$, $n = 14$,
c) Sumę $a_5 + a_6 + \ldots + a_{20}$, gdy $a_n = 5n - 3$.
14. Wyznacz wzór ciągu arytmetycznego, jeśli dane są:
   a) $a_4 = 9$ i $S_9 = 126$
   b) $S_7 = 42$ i $S_{11} = 0$
15. Oblicz x, gdy kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego $(a_n)$ są liczby:
a) $\sqrt{2}, x, \sqrt{2} + 4$ b) $\frac{2x-5}{2}, x - 2, \frac{3x-8}{4}$ c) $x, 2x + 1, 3$
16. Oblicz podaną sumę: 19+21+23+…+119.
17. Między liczby 1 i 49 wstaw siedem takich liczb, by łącznie z danymi były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego $(a_n)$.
18. Trzeci wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 7, a suma szóstego i ósmego wyrazu wynosi 26. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.
19. Pożyczkę w kwocie 8700 zł należy spłacić w dwunastu ratach, z których każda następna jest mniejsza od poprzedniej o 50 zł. Oblicz kwotę pierwszej i ostatniej raty.
20. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 5. Oblicz pole tego trójkąta.
21. Rozwiąż równanie, przyjmując, że lewa jego strona jest sumą kolejnych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego.
a) $6 + 10 + 14 + \ldots + (4n + 2) = 20400$, gdzie $n \in N_+$
b) $7 + 12 + \ldots + (5n + 2) = 3n^2 - 5$, gdzie $n \in N_+$
c) $2 + 5 + 8 + \ldots + x = 392$
d) $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \ldots + (x + 31) = 275$

*Ciąg geometryczny*

22. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu geometrycznego oraz iloraz q, gdy:

a) $a_n = 4^{n-1}$ b) $b_n = 2^n - 2^{n+2}$

23. Oblicz iloraz q ciągu geometrycznego $(a_n)$ i wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu, gdy:

a) $a_1 = 2$ i $a_4 = -16$ b) $a_3 = 6$ i $a_5 = 54$ c) $a_4 = 4$ i $a_7 = 8\sqrt{2}$

24. Składniki sumy $2 + 2\sqrt{2} + 4 + \ldots + 16\sqrt{2}$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz tę sumę.

25. Między liczby 256 i 8 wstaw cztery takie liczby, by łącznie z danymi były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego $(a_n)$.

26. Suma trzech początkowych wyrazów pewnego ciągu geometrycznego jest równa trzykrotności pierwszego wyrazu. Jaki jest jego iloraz?

27. Liczby postaci: $x - 3$, $2x$, $5x + 18$ są odpowiednio siódmym, ósmym i dziewiątym wyrazem ciągu geometrycznego $(a_n)$.

a) Oblicz x

b) Oblicz iloraz q ciągu $(a_n)$ i podaj jego pierwszy wyraz $a_1$.

28. Za trzy książki, których ceny tworzą ciąg geometryczny, zapłacono 76 zł. Najdroższa z tych książek kosztowała o 4zł mniej niż dwie pozostałe razem. Ile kosztowała każda książka?

29. Objętość prostopadłościanu wynosi 64 $cm^3$. Długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka tworzą ciąg geometryczny i suma ich wynosi 21 cm. Wyznacz długości tych krawędzi.

30. Złożono w banku kwotę 5000zł. Oprocentowanie wynosi 6% w skali roku, a odsetki kapitalizowane są co pół roku. Oblicz jaką kwotę otrzymamy po 4 latach.

31. Marek zaoszczędzone 2800 zł wpłacił do banku na lokatę półroczną oprocentowaną 6,5% w skali roku. Za ile lat kwota na jego koncie przekroczy 4000 zł?

32. Spośród podanych czterech liczb trzy pierwsze tworzą ciąg arytmetyczny, a trzy ostatnie ciąg geometryczny. Oblicz x i y, gdy:

a) 2, x, 16, y b) x, 4, 8, y c) 3, 9, x, y .

33. Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny wynosi 65. Jeśli do środkowej liczby dodamy 10, to powstanie ciąg arytmetyczny. Znajdź te liczby.

34. W miejsce gwiazdek wstaw liczby tak, aby trzy pierwsze liczby tworzyły ciąg arytmetyczny, a trzy ostatnie ciąg geometryczny : 4 * * 18.

# 6. Trygonometria

Najważniejsze zagadnienia i umiejętności z tego działu to:

- Znajomość definicji i umiejętność wyznaczania wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°;
- Zależność między funkcjami trygonometrycznymi;
- Umiejętność wyznaczania wartości funkcji trygonometrycznych tego samego kąta na podstawie znajomości wartości jednej z funkcji.

W tablicach macie wartości funkcji trygonometrycznych kątów o mierze od 0° do 90°, jeśli otrzymacie kąt powyżej 90° trzeba użyć wzorów redukcyjnych. Jak? Przykłady poniżej

1) sin 120° = sin (180° - **60°**) = sin60° ---- a to już jest w tabelkach wartości
   Skąd takie rozwiązanie? Musisz od 180° odjąć taką miarę, aby otrzymana różnica dawała kąt, którego sinus masz obliczyć, potem z własności funkcji trygonometrycznych, których nie musisz znać, jest to równoważne sinusowi właśnie tego kąta który odjęliśmy od 180°.
   **Ważne** znaki funkcji: sinus zawsze dodatni, cosinus i tangens powyżej 90° ujemny!
2) cos 135° = cos(180° - 45°) = - cos 45°
3) tg150° = tg(180° - 30°) = - tg 30°

Jak obliczyć wartość jednej funkcji na podstawie wartości drugiej? Tym razem podam Wam dwa sposoby, wybierzcie ten, który Wam bardziej odpowiada ☺

1° Wzory:

2° Definicje i trójkąt

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ oraz $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$

Przykład: Niech $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ i kąt α jest kątem ostrym. Oblicz $\cos\alpha$ i $tg\alpha$

1° $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + cos^2\alpha = 1$

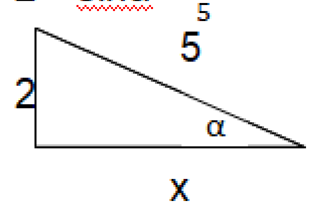
$\frac{4}{25} + cos^2\alpha = 1$ $\quad / - \frac{4}{25}$

$cos^2\alpha = \frac{21}{25}$ $\quad$ / pierwiastkujemy

$cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$ $\quad$ / tylko dodatnie rozwiązanie bo kąt ostry

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{2}{5} : \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$$

2° $\sin\alpha = \frac{2}{5}$




z tw. Pitagorasa

$2^2 + x^2 = 5^2$

$4 + x^2 = 25$

$x^2 = 21$

$x = \sqrt{21}$

$$cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$tg\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$$

# Lista do samodzielnego rozwiązania

1. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 40, a jeden z kątów ostrych $\alpha$ = 60°. Wyznacz długości pozostałych boków trójkąta.
2. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha$, na którego końcowym ramieniu leży punkt P:

a) P = (2, $\sqrt{5}$) b) P = (- 3, 4)

3. Oblicz wartość liczbową wyrażenia:

a) $tg45° - 2tg^2 45° + 2sin30° + 3tg60°$

b) $\frac{cos60°}{1+sin60°} + \frac{1}{tg30°}$

c) $\frac{4sin60°-6tg60°}{sin^2 45°+cos^2 45°}$

d) $sin60° + sin120°$

e) $sin^2 30° + cos^2 150°$

4. Oblicz, nie korzystając z tablic ani z kalkulatora, wartość wyrażenia:

a) $\frac{cos39°}{sin51°}$

b) $\frac{cos20°}{cos70°} \cdot tg20°$

c) $\frac{sin11°}{cos79°} + \frac{cos23°}{sin67°}$

d) $\frac{1-(cos^2 10°+cos^2 80°)}{tg^2 42°}$

5. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego $\alpha$, gdy:

a) $sin\alpha = \frac{1}{3}$ b) $cos\alpha = \frac{3}{5}$ c) $tg\alpha$ = 2 d) $cos\alpha = \frac{3}{7}$.

6. W trójkącie prostokątnym suma sinusów kątów ostrych jest równa $\frac{3}{2}$; oblicz iloczyn cosinusów tych kątów.
7. Oblicz wartość wyrażenia $sin\alpha \cdot cos\alpha$, gdy $sin\alpha$ + $cos\alpha$ = $\frac{6}{5}$ $i\ 0° < \alpha < 90°$.
8. Oblicz wartość wyrażenia $sin\alpha$ + $cos\alpha$, gdy $sin\alpha \cdot cos\alpha$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $i\ 0° < \alpha < 90°$.
9. Wyznacz miarę kąta ostrego między przekątnymi prostokąta o bokach $2\sqrt{6}$ i $3\sqrt{2}$.
10. Pole trójkąta ABC jest równe 14 cm$^2$. Oblicz miarę kąta ostrego BCA, gdy |AC| = 8 i |BC| = 7
11. Dany jest prostokąt, w którym przekątna jest o 1 dłuższa od krótszego boku. Przekątna ta tworzy z dłuższym bokiem prostokąta kąt α taki, że $sin\alpha$ = $\frac{4}{7}$. Wyznacz długość krótszego boku prostokąta.
12. W trójkącie ABC dane są: $|\sphericalangle CAB|$ = 30°, $|\sphericalangle ABC|$ = 120°, |AB| = 12. Wyznacz długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka C.

# 7. Planimetria

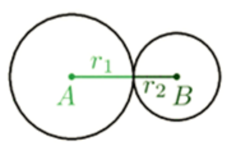
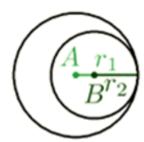
Najważniejsze zagadnienia i umiejętności z tego działu to:

- Kąty w kole, rodzaje i własności;
- Własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych;
- Trójkąty podobne;
- Korzystanie z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych; w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

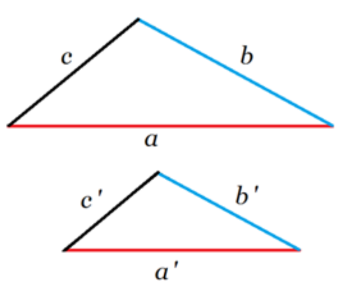
Jeśli chodzi o teorię to macie ją w karcie wzorów – korzystajcie z niej!

To co mogę doradzić: robimy rysunki pomocnicze, zapisujemy związki między danymi i korzystamy z twierdzeń, wzorów .

Pamiętajcie:

| Okręgi styczne zewnętrznie | Okręgi styczne wewnętrznie |
|---|---|
|   $\lvert AB\rvert = r_1 + r_2$ |   $\lvert AB\rvert = \lvert r_1 - r_2\rvert$ |

<u>Podobieństwo trójkątów</u>




1) Jak obliczyć skalę podobieństwa?

$$k = \frac{a'}{a} \quad lub \quad k = \frac{b'}{b} \quad lub \quad k = \frac{c'}{c}$$

2) Co jeśli podali nam obwody?

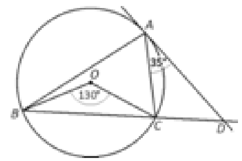
$$k = \frac{Ob'}{Ob}$$

3) A jeśli mamy pola trójkątów podobnych?

$$k^2 = \frac{P'}{P}$$

# Lista do samodzielnego rozwiązania

1. Oblicz miary kątów trójkąta $ABC$ oraz miary dwóch kątów ($\angle C$ i $\angle D$) trójkąta $ACD$, wykorzystując dane na rysunku poniżej oraz wiedząc, że prosta $AD$ jest styczna do okręgu w punkcie $A$, zaś punkt $O$ jest środkiem okręgu.




2. Sprawdź, czy podobne są trójkąty, których boki mają odpowiednio długości:
   a) 9, 12, 15 i 15, 20, 25
   b) $2\sqrt{6}, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{3}$ i $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$
   c) 4, 3, 2 i 10, $7\frac{1}{2}$, 5
   d) $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ i 3, 5, 7
3. Trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych 3 cm i 4 cm jest podobny do trójkąta A'B'C', którego obwód wynosi 36 cm. Oblicz długości boków trójkąta A'B'C'.
4. W trójkącie ABC wysokość CD jest równa 10. Odcinek EF długości 6 jest równoległy do boku AB długości 8.
   a) W jakiej odległości x od podstawy AB leży odcinek EF?
   b) Oblicz stosunek pola trapezu ABEF do pola trójkąta ABC.
5. W trapezie prostokątnym ABCD przekątna AC dzieli go na dwa trójkąty prostokątne ADC i ACB. Wiedząc, że $|AD| = 12$ i $|DC| = 16$ oblicz skalę podobieństwa trójkątów ADC i ACB oraz pole trapezu ABCD.
6. Oblicz pole trójkąta wiedząc, że dwa jego boki mają długość 14cm i 8cm a kąt zawarty między tymi bokami ma miarę 60°.
7. Pole trapezu równoramiennego jest równe $39\sqrt{3}\text{cm}^2$. Ramię długości $6\sqrt{3}$cm tworzy z dłuższą podstawą kąt o mierze 30°. Oblicz obwód trapezu i długość przekątnej.
8. Bok rombu ma długość 4cm, a jeden z jego kątów ma miarę 60°. Oblicz pole rombu i długości jego przekątnych.
9. Boki równoległoboku maja długości 8cm i 15cm, a kąt ostry ma miarę $\alpha$. Oblicz pole równoległoboku, jeżeli $\cos\alpha = \frac{1}{4}$.
10. W równoległoboku ABCD wysokość $h_1 = 2$cm i $h_2 = 4$cm. Obwód równoległoboku wynosi 48cm, oblicz długości jego boków.
11. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB|=10$cm, $|BC|=|AC|=13$cm. Oblicz:
    a) Pole tego trójkąta,
    b) Długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie,
    c) Długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
12. Długości boków trójkąta wynoszą 5, 8 i 7, a długość promienia okręgu wpisanego jest równa 3. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
13. W trójkącie prostokątnym stosunek przyprostokątnych wynosi 3:4, a długość przeciwprostokątnej 15cm. Oblicz pole trójkąta oraz promienie okręgów: wpisanego i opisanego na tym trójkącie.
14. Kąt rozwarty równoległoboku wynosi 150°. Wiedząc, że stosunek długości jego boków wynosi 2:3, a obwód jest równy 40cm, oblicz pole tego równoległoboku.
15. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na odcinki długości 2 i 8. Oblicz pole tego trójkąta oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
16. Oblicz pole kwadratu, którego przekątna jest o 2cm dłuższa od boku.
17. Kąt rozwarty równoległoboku o bokach długości 6 i 7 wynosi 150°. Oblicz pole tego równoległoboku.
18. Różnica długości przekątnych rombu wynosi 2cm. Wiedząc, że obwód rombu ma długość 116cm oblicz długości przekątnych.

# 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej

Najważniejsze zagadnienia z tego działu to:

- wyznaczanie równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej);
- równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;
- wyznaczanie równania prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt;
- obliczanie współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych;
- obliczanie współrzędnych środka odcinka;
- obliczanie odległości dwóch punktów;
- obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

W tym dziale niemalże wszystkie wzory macie w tablicach, więc tym razem krótko wyróżnię najważniejsze informacje.

<u>Równoległość i prostopadłość prostych</u> - zawsze na maturze

Dwie proste są równoległe, gdy $a_1 = a_2$. Co to dla nas oznacza? Współczynnik(liczba) zmiennej x jednej prostej jest taki sam jak drugiej prostej, np.

a) $y = 2x + 7$ i $y = 2x - 4$
b) $y = -\frac{2}{5}x + 1$ i $y = -\frac{2}{5}x + 4$

Dwie proste są prostopadłe, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$ (inaczej $a_1 = -\frac{1}{a_2}$). Ja tłumaczę że ten współczynnik musi być liczbą odwrotną i przeciwnego znaku, np.

a) $y = 2x + 4$ i $y = -\frac{1}{2}x + 1$ ($2 = \frac{2}{1}$ $\frac{1}{2}$ i oczywiście „–” bo przeciwny znak)
b) $y = -\frac{3}{4}x + 1$ i $y = 1\frac{1}{3}x + 2$ ($\frac{3}{4}$ $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$)

<u>Prosta przechodząca przez dwa punkty</u> – wzór w tablicach, choć „według mnie” łatwiej w ten sposób:

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty A=(2, 5) i B=(- 4, -1)

Prosta – wzór ogólny to $y = ax + b$,
punkty mają współrzędne (x, y) więc nasz cel to obliczyć a i b

$$\begin{cases} 5 = 2a + b \\ -1 = -4a + b \end{cases}$$

Punkt A=(2, 5) czyli x = 2, y = 5 i podstawiamy do wzoru

$$\begin{cases} 5 = 2a + b \\ 1 = 4a - b \end{cases}$$

$$6 = 6a$$

$a = 1$ teraz podstawiamy do jednego równania (wybór Wasz) $5 = 2 \cdot 1 + b$, zatem $b = 3$

Odpowiedź: $y = x + 3$ (nie piszemy przecież 1x)

Punkt przecięcia dwóch prostych - nawet gdybyście mieli obliczyć punkt przecięcia prostej i krzywej (np. prostej i paraboli) sposób działania jest taki sam ☺

Wynikiem przecięcia dwóch prostych jest punkt, który ma współrzędne (x, y). Spełniają one oba równania, zatem trzeba je do siebie przyrównać i już.

Przykład: Oblicz współrzędne punktu przecięcia prostych $y = 3x - 7$ i $y = 2x + 1$

Rozwiązanie: $3x - 7 = 2x + 1$

$3x - 2x = 1 + 7$

$x = 8 \longleftarrow$ ponieważ punkt należy do obu prostych podstawiamy wyliczony x do któregokolwiek równania (ja podstawiam do pierwszego)

$$y = 3 \cdot 8 - 7 = 24 - 7 = 17$$

Zatem punkt przecięcia tych prostych ma współrzędne (8, 17)

# Lista do samodzielnego rozwiązania

1. Równanie prostej $5x - 2y + 4 = 0$ zapisz w postaci kierunkowej, a równanie prostej $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$ zapisz w postaci ogólnej o współczynnikach całkowitych.
2. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B, gdy:

a) $A = (1, 4)$ $B = (4, 2)$ b) $A = (-6, 2)$ $B = (4, -3)$

3. Określ wzajemne położenie prostych o równaniach:

a) $y + 5x = 2$ i $5x = 2 - y$ b) $2x + y + 5 = 0$ i $y = -2x + 4$

4. Wyznacz równanie prostej równoległej i prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt P, jeżeli:

a) k: $y = 3x - 5$, $P = (2, 4)$ b) k: $2x + 3y + 7 = 0$, $P = (2, 4)$

5. Oblicz wartość m, wiedząc że proste k i l są równoległe

a) k: $y = (m + 4)x - 1$, l: $y = -mx + 2$ b) k: $y = 9mx + 1$, l: $y = m^2x - 3$

6. Oblicz wartość m, wiedząc że proste k i l są prostopadłe

a) k: $y = (m + 1)x + 3$, l: $y = \frac{1}{2m-4}x + 1$ b) k: $y = (m - 3)x + 1$, l: $y = (m+3)x + 2$

7. Wyznacz długość i środek odcinka o końcach $A=(3, -3)$, $B=(-1, 5)$
8. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB, gdzie

a) $A=(-3, -3)$ $B=(-1, 1)$ b) $A=(3,2)$ $B=(21, -10)$

9. Końcem odcinka AB jest punkt $A=\left(\frac{2}{3}, 3\right)$. Symetralna odcinka AB przecina ten odcinek w punkcie $C = (-3, 6)$. Oblicz współrzędne punktu B.
10. Napisz równanie symetralnej odcinka, którego końcami są punkty przecięcia prostej o równaniu $x + 2y + 4 = 0$ z osiami układu współrzędnych.
11. Oblicz współrzędne punktu P' symetrycznego do punktu $P=(5, 2)$ względem prostej o równaniu $y = 0{,}5x + 2$
12. Punkty $A = (1, 2)$, $B = (-1, -1)$, $C = (5, 2)$ są wierzchołkami trójkąta. Napisz równanie prostej zawierającej:

a) wysokość tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A.

b) środkową poprowadzoną z wierzchołka C.

13. Punkty $A=(-4, -4)$ i $B=(8, 2)$ są sąsiednimi wierzchołkami prostokąta ABCD, którego środkiem symetrii jest punkt $S=(1, 1)$.

a) Znajdź równanie prostej zawierającej przekątną AC

b) Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D

c) Oblicz pole i obwód prostokąta ABCD.

14. Punkty $A=(-3, -1)$ i $C=(1, 11)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu ABCD.

a) Oblicz pole tego kwadratu

b) Wyznacz równanie prostej zawierającej przekątną BD

15. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta A'B'C', który jest obrazem trójkąta ABC, gdzie $A = (-5, 1)$, $B = (1, 3)$, $C = (-3, 5)$:

a) W symetrii osiowej względem osi x,

b) W symetrii osiowej względem osi y,

c) W symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

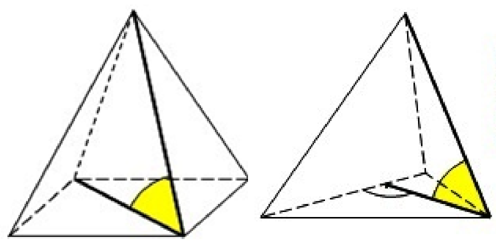
# 9. Stereometria

Najważniejsze zagadnienia z tego działu to:

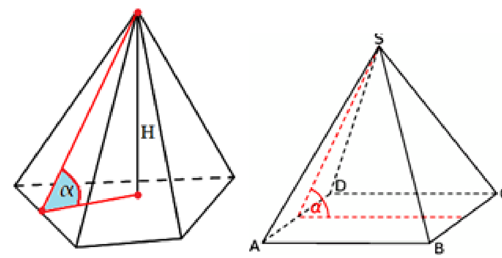
- kąty między odcinkami w graniastosłupach i ostrosłupach (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), obliczanie miary tych kątów;
- kąt między odcinkami i płaszczyznami w graniastosłupach i ostrosłupach (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), obliczanie miary tych kątów;
- rozpoznawanie w graniastosłupach i ostrosłupach kątów między ścianami;
- określanie, jaką figurą jest przekrój prostopadłościanu daną płaszczyzną;
- zastosowanie trygonometrii do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

# Najważniejsze kąty

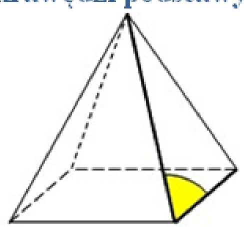
**Kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy**



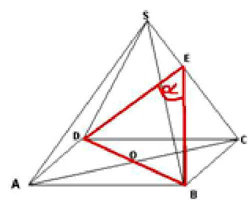
**Kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy**



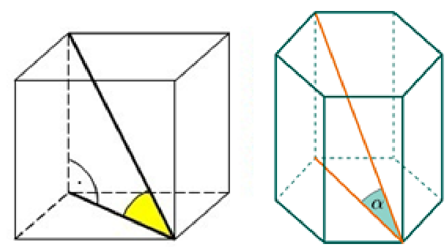

**Kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do krawędzi podstawy**



**Kąt między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi**

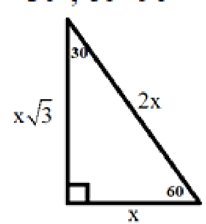



**Kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy**

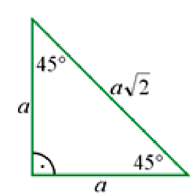



Dla osób, które nie lubią korzystać z trygonometrii, szybkie przypomnienie zależności między długościami boków w trójkątach o kątach:

30°, 60° 90°

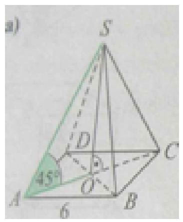


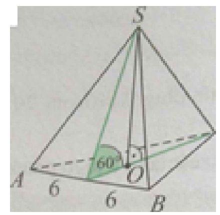

45°, 45°, 90°

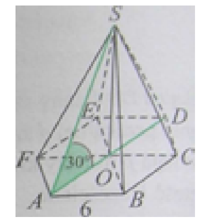


# Lista do samodzielnego rozwiązania

1. Krawędzie prostopadłościanu mają długości: 5cm, 12cm i 13cm. Oblicz miarę kąta między przekątną prostopadłościanu a najdłuższą jego krawędzią.
2. Pole podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe $36m^2$. Kąt między przekątna ściany bocznej a krawędzią podstawy ma miarę $60°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa.
3. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego, uwzględniając dane przedstawione na rysunku.



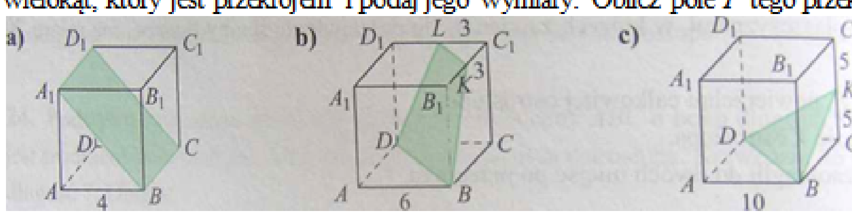

4. Podstawą ostrosłupa jest romb o polu 144 $cm^2$, w którym stosunek długości przekątnych jest równy 2:1. Jedna z krawędzi bocznych ostrosłupa poprowadzona z wierzchołka kata ostrego rombu jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Najdłuższa z krawędzi bocznych jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem miary $30°$. Oblicz:

a) Długości wszystkich krawędzi ostrosłupa,
b) objętość **V** ostrosłupa.

5. Podstawą ostrosłupa ABCS jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 8. Punkt D jest środkiem krawędzi AC, odcinek DS. jest wysokością ostrosłupa. Krawędź AS i CS mają długość 7. Oblicz:

a) Długość krawędzi BS tego ostrosłupa,
b) Miarę kąta nachylenia najdłuższej krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

6. Na rysunku kolorem wyróżniono przekrój sześcianu. Uwzględnij przedstawione dane, nazwij wielokąt, który jest przekrojem i podaj jego wymiary. Oblicz pole *P* tego przekroju



# 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka

Najważniejsze zagadnienia z tego działu to:

- Średnia ważona, średnia arytmetyczna, mediana, dominanta i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych;
- zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosowanie reguły mnożenia i reguły dodawania;
- obliczanie prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Wyjaśnijmy najpierw pojęcia:

**Mediana** – to wartość środkowa w uporządkowanym zestawie danych.

1° jeśli mamy nieparzystą liczbę danych, to nie ma problemu bo istnieje środkowa dana, np. gdy w zestawie(już uporządkowanym) jest 27 liczb, to medianą jest 14 liczba (wzór: (27+1):2 )

2° jeśli mamy parzystą liczbę danych, to medianę będziemy wyliczać ze średniej arytmetycznej dwóch środkowych, np. w zestawie 28 liczb weźmiemy daną 14 i 15 i z nich obliczymy średnią arytmetyczną)

**Dominanta (moda) -** czyli wartość która pojawią się najczęściej. W jednym zestawie może być jedna wartość dominująca, kilka lub nie być jej wcale, np.

Zestaw I: 1, 2, **3, 3**, 4, 5, **6, 6**, 7, 8 $m_o = 3$ i $m_o = 6$

Zestaw II: 1, 2, 3, 4, 5, 6 brak dominanty

**Reguła mnożenia**

Dotyczy zadań kombinatorycznych i służy do zliczania możliwych wyników doświadczenia losowego. Reguła ta mówi, że wyniki na kolejnych etapach doświadczenia należy przez siebie pomnożyć, np.

Ile jest wyników przy 3-krotnym rzucie symetryczną monetą?

Odpowiedź: 8

1 rzut – 2 możliwości (orzeł lub reszka),
2 rzut – 2 możliwości,

3 rzut – 2 możliwości, zatem mamy $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

# Lista do samodzielnego rozwiązania

**1.** Oblicz średnią arytmetyczną zestawu podanych danych:

a) 1, 3, 5, 0, 2, 1, 3,

b)

| Wartość | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Liczebność | 4 | 2 | 3 | 1 |

c) 3, 4, 5, 2, 3, 9, 2, 3,

d)

| Wartość | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Częstość | 0 | 0,09 | 0,41 | 0,35 | 0,10 | 0,05 |

**2.** Średnia arytmetyczna liczb: 11, 12, 8, 11, x, 3, 4, 6, 8, 8 jest równa 8,5. Oblicz x, a następnie medianą $m_e$ tego zestawu liczb.

**3.** Badając czas działania pewnego urządzenia dokonano dziesięciu pomiarów i otrzymano wyniki (w minutach): 130, 130, 130, 130, 132, 132, 133, 134, 134, 135

a) Wyznacz medianę $m_e$ tego zbioru wyników

b) Oblicz średnią $\overline{x}$ wyników.

**4.** W pięciu różnych księgarniach ceny tej samej książki były następujące: 21,50 zł; 20 zł; 21 zł; 22 zł; 22,40 zł.

a) Podaj medianę $m_e$ cen.

b) Oblicz średnią arytmetyczną ceny książki.

c) Oblicz odchylenie standardowe od średniej arytmetycznej, wynik podaj w zaokrągleniu do 1gr.

**5.** W karcie dań restauracji widnieje 5 zup, 8 drugich dań i 4 desery. Ile jest możliwych:

a) pełnych zestawów obiadowych: zupa, drugie danie i deser,

b) zestawów tylko drugie danie i deser?

**6.** Czterokrotnie losujemy z pudełka kartki oznaczone cyframi. Po losowaniu jednej kartki z cyfrą zapisujemy tę cyfrę, a kartkę odkładamy do tego samego pudełka i losujemy ponownie. Losując w taki sposób otrzymamy pewną liczbę czterocyfrową. Oblicz, ile można otrzymać różnych liczb czterocyfrowych, jeżeli na kartkach w pudełku zapisano cyfry:

a) 1, 3, 5, 7,

b) 0, 1, 2, 3,

c) 0, 1, 2, 5, 7.

**7.** Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiątkowym:

a) występują tylko cyfry nieparzyste lub tylko cyfry parzyste,

b) występuje jedna cyfra nieparzysta i jedna cyfra parzysta.

**8.** Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym:

a) występuje jedna cyfra nieparzysta i dwie cyfry parzyste,

b) występuje jedna cyfra parzysta i dwie cyfry nieparzyste.

**9.** Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Sporządź drzewo tego doświadczenia losowego i oblicz prawdopodobieństwo:

a) Zdarzenia A, że otrzymamy dwa razy orła,

b) Zdarzenia B, że otrzymamy trzy razy orła lub trzy razy reszkę,

c) zdarzenia C, że otrzymamy co najmniej dwa razy reszkę,

**10.** Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo:

a) zdarzenia A, że otrzymamy sumę oczek nie mniejszą od dziewięciu,

b) zdarzenia B, że otrzymamy pięć oczek co najmniej na jednej kostce,

**11.** W klasie jest 16 dziewcząt i 14 chłopców. Dwie losowo wybrane osoby będą reprezentowały klasę jako kibice rozgrywek szkolnych w siatkówce. Sporządź drzewo tego doświadczenia losowego i oblicz prawdopodobieństwo:

a) zdarzenia $A$, że kibicami będą dwie dziewczyny,

b) zdarzenia $B$, że kibicami będzie jedna dziewczyna i jeden chłopiec.

**12.** Spośród jedenastu kobiet i dziewięciu mężczyzn losowo wybrano trzyosobową delegację. Sporządź drzewo tego doświadczenia losowego i oblicz prawdopodobieństwo:

a) zdarzenia A, że w skład delegacji wejdzie co najmniej jeden mężczyzna,

b) zdarzenia B, że w skład delegacji wejdzie co najmniej dwóch mężczyzn.

**13.** Z pojemnika, w którym jest pięć losów: dwa wygrywające i trzy puste, losujemy dwa razy po jednym losie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy co najmniej jeden los wygrywający. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

**14.** Drewniany sześcian, którego wszystkie ściany są pomalowane na zielono, został po. dzielony na 64 przystające małe sześciany. Wszystkie te sześciany dokładnie przemieszano a następnie losowo wybrano jeden. Oblicz prawdopodobieństwo:

a) zdarzenia $\boldsymbol{A}$, że wybrany sześcian ma jedną ścianę zieloną,

b) zdarzenia $\boldsymbol{B}$, że wybrany sześcian ma co najmniej jedną ścianę zieloną.

**15.** W urnie jest 12kul zielonych. Ile kul czerwonych trzeba dorzucić, by prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej było równe 0,4?

# 11. Zadania optymalizacyjne

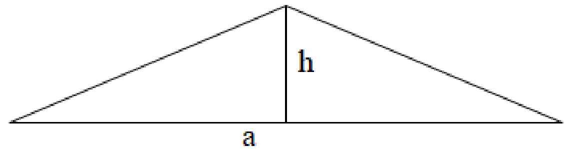
Są to zadania umieszczone w kontekście realistycznym, które mają na celu wyznaczenie wartości danych tak, aby oczekiwana wielkość była największa lub najmniejsza.

Zadanie te na poziomie podstawowym omawiane są przy funkcji kwadratowej, gdyż dla niej wiemy, że osiąga ona wartość największą, gdy ramiona parabola ma skierowane w dół, a najmniejszą, gdy jej ramiona biegną do góry.

## Przykład:

Suma długości boku trójkąta i wysokości opuszczonej na ten bok wynosi 10 cm. Jaką długość powinien mieć bok, a jaką wysokość, aby pole było największe? Oblicz maksymalne pole tego trójkąta?

Dane:




$a + h = 10$ Mamy dwie dane, a tylko jeden związek między tymi danymi zatem wyznaczmy zależność między nimi

$a = 10 - h$ Tutaj trzeba pamiętać o DZIEDZINIE! Dlaczego? a – to długość boku więc nie może być ujemna (podobnie jak h)

$h \in (0, 10)$

Pamiętajmy co jest naszym celem. Chcemy, aby pole tego trójkąta było jak największe.

$$P_\Delta = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}(10-h)h = \frac{1}{2}(10h - h^{2)} = 5h - \frac{1}{2}h^2$$

Otrzymaliśmy funkcję zmiennej h, która opisuje nam pole tego trójkąta

$$P(h) = -\frac{1}{2}h^2 + 5h$$

Jest to funkcja kwadratowa, która ma ramiona skierowane w dół, zatem osiąga ona największą wartość w wierzchołku, obliczmy go:

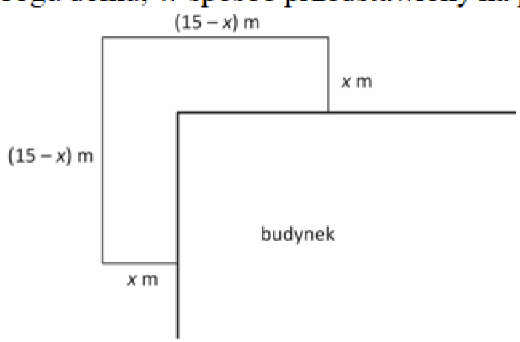
$x_w = -\frac{b}{2a}$ zwróć uwagę, że nasza funkcja jest zmiennej $h$, a nie $x$, czyli

$$h = \frac{-5}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = \frac{-5}{-1} = 5$$

Zatem nasze pole będzie największe jeśli h = 5 i a = 5 (bo a = 10 – h).
Będzie ono wynosiło $P = 12{,}5$

# Lista do samodzielnego rozwiązania

1. Mamy 240m bieżącej siatki ogrodzeniowej. Chcemy ogrodzić prostokątny ogródek o jak największej powierzchni. Jakie wymiary ma ogródek? Oblicz maksymalne pole tego ogródka?
2. Przy brzegu jeziora chcemy wyznaczyć kąpielisko w kształcie prostokąta, odgradzając je sznurem z bojami. Sznur którym dysponujemy ma długość 80m. Jakie wymiary powinno mieć to kąpielisko, aby jego powierzchnia była możliwie największa?
3. Gospodarz budynku dysponuje płotkiem długości 30 m, którym chce ogrodzić teren wokół lewego rogu domu, w sposób przedstawiony na poniższym rysunku.

   Jakie może być największe pole ogrodzonego w ten sposób terenu?

4. Liczbę 20 rozłóż na dwa składniki, których suma kwadratów jest możliwie najmniejsza.

5. Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest równa 64. Oblicz, przy jakiej wysokości tego prostopadłościanu jego pole powierzchni całkowitej będzie największe.

6. Drut długości 20cm przecięto na dwie części. Z jednej części zrobiono ramkę kwadratową o boku długości $x$ cm, a z drugiej ramkę prostokątną, której dłuższy bok ma długość 3cm. Jaka jest najmniejsza wartość sumy pól figur ograniczonych przez te ramki?

# i to już koniec ☺

Beata Paczkowska